Πόρισμα 12.2.4
Ας είναι $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ τοπ. χώροι και $f:(E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ μια συνάρτηση. Η f είναι συνεχής αν-ν f συνεχής σε κάθε σημείο $x \in E_1$

Πρόταση 12.1.5
Ας είναι $(E_1, \mathcal{T}_1)$ $(E_2, \mathcal{T}_2)$ τοπ. χώροι και $f: (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ μια συνεχής συνάρτηση στο σημείο $p \in E_1$ και $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο E_1 με $a_\nu \to p$. Τότε $f(a_\nu) \to f(p)$.

Απόδειξη
- Έστω τυχούσα περιοχή $A \in \mathcal{N}_{f(p)}$. Επειδή f συνεχής, από ορισμό $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_p$. Επίσης αφού $a_\nu \to p$ παίρνουμε ότι $a_\nu \in f^{-1}(A) \Rightarrow$ $f(a_\nu) \in f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ τελικά για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$. Άρα $f(a_\nu) \to f(p)$

Το αντίστροφο ισχύει;
Δηλαδή, αν $a_\nu \to p$ και $f(a_\nu) \to f(p) \Rightarrow f$ συνεχής; ΟΧΙ

Έστω $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ δύο τοπ. χώροι, όπου $\mathcal{T} = \{X \subseteq E,\ X^c \text{ αριθμήσιμο}\}$.

Θ.δ.ο. $a_\nu \to b$ και μάλιστα $a_\nu = b$, a_ν σταθερή.
- Έστω ότι η a_ν δεν είναι σταθερή

Τότε $\exists$ a_{k_ν} υπακολουθία της a_ν με διακεκριμένους όρους, όπου δεν περιέχει το b. Τότε το σύνολο $A = \{a_{k_\nu} : \nu \in \mathbb{N}\}$ θα ήταν αριθμήσιμο, άρα $A^c \in \mathcal{T}$. Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $b \in A^c$. Αφού $a_\nu \to b$, θα ισχύει ότι $a_{k_\nu} \to b$. Άρα $a_{k_\nu} \in A \cap A^c = \emptyset$ και $a_\nu \in A^c$ Άτοπο.
Επομένως a_ν σταθερή με $a_\nu = b$.

Αντιπαράδειγμα
Έστω $i : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$

Τότε $i^{-1}((-\infty, 0) \cup (1, +\infty)) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \in \mathcal{T}$

Δηλ., οι αντίστροφες εικόνες της i στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ θα είναι το ίδιο σύνολο.

Το $((-\infty,0)\cup(1,+\infty))^c = [0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\in\mathcal{T}$, ενώ $i^{-1}\notin\mathcal{T}$.
Άρα η i δεν συνεχής.

Όμως, αν $b\in\mathbb{R}$ και $a_\nu\to b$, τότε $a_\nu=b$
Άρα $i(a_\nu)=i(b)=b$ τελικά, οπότε $i(a_\nu)\to i(b)=b$ | Τέλος

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.1.6
Τ.Α.Ε.Ι.
i) f συνεχής $f:(E_1,\mathcal{T}_1)\to(E_2,\mathcal{T}_2)$
ii) $\forall G\subseteq E_2$ ανοιχτό $f^{-1}(G)$ ανοιχτό στο E_1
iii) $\forall F\subseteq E_2$ κλειστό, $f^{-1}(F)$ κλειστό στο E_1
iv) $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ $\forall A\subseteq E_1$
v) $f^{-1}(\overline{B})\supseteq\overline{f^{-1}(B)}$ $\forall B\subseteq E_2$
vi) $f^{-1}(A^\circ)\supseteq(f^{-1}(A))^\circ$ $\forall A\subseteq E_2$

Απόδειξη
i) => ii) Έστω $G\subseteq E_2$ ανοιχτό και $x\in f^{-1}(G)$
Τότε, αφού f συνεχής $f(x)\in f(f^{-1}(G))\subseteq G$ και $G\in\mathcal{N}_{f(x)}$.
Δηλ. αφού f συνεχής $f^{-1}(G)\in\mathcal{N}_x$.
Συνεπώς, $f^{-1}(G)$ περιοχή κάθε σημείου του, άρα $f^{-1}(G)$ ανοιχτό στο E_1

ii) => iii) Έστω $F\subseteq E_2$. Τότε $Y\setminus F$ ανοιχτό, αφού F κλειστό, και από ii) $f^{-1}(Y\setminus F)=Y\setminus f^{-1}(F)$ ανοιχτό.
Συνεπώς, $f^{-1}(F)$ κλειστό στο E_1.

iii) => iv) Έστω $A\subseteq E_1$. Από (iii) για το κλειστό $F=\overline{f(A)}$ έχουμε ότι $f^{-1}(\overline{f(A)})$ είναι κλειστό στο E_1. Επιπλέον, $A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Άρα από ορισμό κλειστότητας $\overline{A}\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ =>
$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$

iv) $\Rightarrow$ v) · Έστω $B \subseteq E_2$. Από (iv) για $A = f^{-1}(B)$, έχουμε ότι $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))}$. Επιπλέον, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \Rightarrow \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$

Επομένως
$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \\ \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

v) $\Rightarrow$ vi) · Έστω $B \subseteq E_2$. Τότε $X \setminus (f^{-1}(B))^\circ = \overline{X \setminus f^{-1}(B)}$

$$\overline{f^{-1}(X \setminus B)} \subseteq f^{-1}(\overline{X \setminus B}) \overset{\text{από (v)}}{=} f^{-1}(X \setminus B^\circ) = X \setminus f^{-1}(B^\circ)$$

Άρα $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$

vi) $\Rightarrow$ i) Έστω τυχόν $x \in E_1$ και $A \in \mathcal{N}_{f(x)}$. Τότε $f(x) \in A^\circ$, δηλαδή,

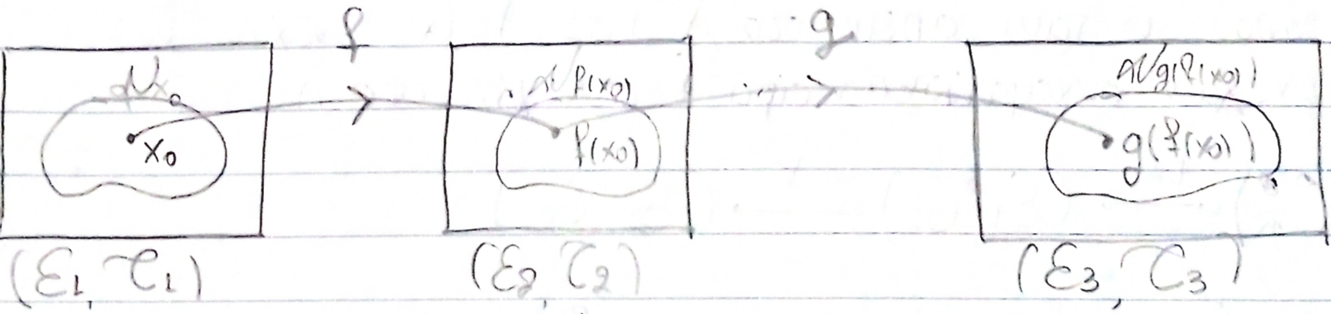
$x \in f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$

Άρα $f^{-1}(A^\circ) \in \mathcal{N}_x$.

Επομένως, f συνεχής στο x.

Αφού f συνεχής για τυχόν $x \in E_1$, f συνεχής.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



Αν f, g συνεχής $\Rightarrow g \circ f$ συνεχής,

Αποδειξη

Αφού f, g συνεχής ισχύουν οι ορισμοί

Θ.δ.ο $(g\circ f)^{-1}(x_0)\in\tau_1$

Εστω $x_0\in\tau_3$

Αφού g συνεχής $g^{-1}(x_0)\in\tau_2$

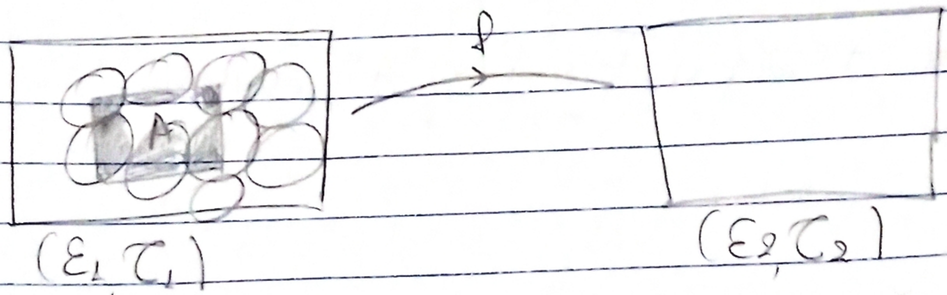
Αφού f συνεχής $f^{-1}(g^{-1}(x_0))\in\tau_1 = (g\circ f)^{-1}(x_0)\in\tau_1$

Επομένως, $g\circ f$ συνεχής.

Προταση 12.1.7.

Εστω (E_1,τ_1), (E_2,τ_2) δύο τοπ. χώροι και $f:(E_1,\tau_1)\to(E_2,\tau_2)$ συνεχής συναρτηση, τότε $\forall A\subseteq E_1$, η f είναι συνεχής στο A.

Αποδειξη



* f συνεχής $\Rightarrow f|_A$ με τη σχετική τοπολογία είναι συνεχής.

Σχετική τοπολογία: $\tau_A=\{X=U\cap A,\ \forall U\in\tau_1\}$

$f|_A = f\circ i_A$, όπου i_A ταυτ. απεικ. στο A. Τότε $f\circ i_A$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα f συνεχής στο A.

$i_A:(A,\tau_A)\xrightarrow{i_A}(E_1,\tau_1)\xrightarrow{f}(E_2,\tau_2)$

$_A$" είναι ακριβώς το ίδιο σύνολο, δηλ. i_A συνεχής από τον ορισμό της.

Πρόταση 12.1.8

Έστω $f:(E_1,\tau_1)\to(E_2,\tau_2)$ μια συνάρτηση και $A\subseteq E_1$.
Αν f συνεχής σε κάθε σημείο $x\in A$ στην τ_1, τότε η f είναι στο A.

Απόδειξη

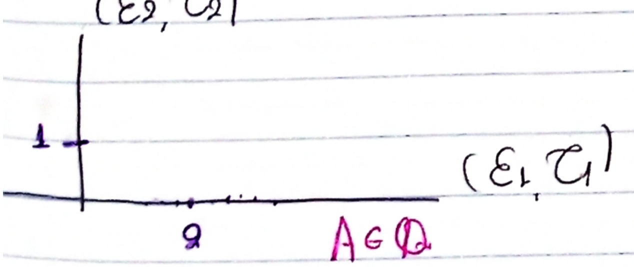
Έστω $f|_A: f\circ i_A: A\to f(A)$. Για τυχόν $x\in A$ η f και η i_A συνεχής στο x. Άρα $f|_A$ συνεχής στο x.

Παρατηρήσεις 12.1.9

i) Το αντίστροφο δεν ισχύει ΠΑΝΤΑ

Δηλ. $f|_A$ συνεχής δεν ισχύει απαραίτητα f συνεχής σε κάθε σημείο $x\in A$ στην (E_1,τ_1).

Αν $f:(\mathbb{R},|\cdot|)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$, η συνάρτηση Dirichlet, τότε $f|_{\mathbb{Q}}=0$ είναι συνεχής, δηλ. η f είναι συνεχής στο $\mathbb{Q}$, αλλά f μη συνεχής σε κάθε $q\in\mathbb{Q}$



$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$f|_A$ θα είναι συνεχής και σταθερή

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{Q})\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |\overset{=0}{f(x)}-\overset{=0}{f(x_0)}|<\varepsilon$ είναι συνεχής

τώρα, το "ανοίγω" στο $\mathbb{R}$.

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |\overbrace{f(x)}^{=1} - \overbrace{f(2)}^{=0}|<\varepsilon$ Άτοπο, αφού
f όχι συνεχής.

Κατευθυνόμενο Σύνολο
Έστω $A \neq \emptyset$

$\leq$: i) ανακλαστική
ii) μεταβατική
iii) $\forall a, b \in A\ \exists \gamma\ \gamma \geq a,\ \gamma \geq b$

* Η $\leq$ δεν είναι ολική, δεν είναι αναγκαίο τα στοιχεία να συγκρίνονται μεταξύ τους

Παράδειγμα
$\mathbb{N}$ κατευθυνόμενο, καθώς αν $a=3$, $b=5$ $\exists \gamma=7$ τω $3\leq 7$, $5<7$

Πρόταση
Έστω (E, τ) τοπ χώρος και $\mathcal{U}_x$ συστήματα περιοχών.
Τότε $\mathcal{U}_x$ κατευθυνόμενο

Απόδειξη
$U \geq V \Leftrightarrow U \subseteq V$
↑ υστερεί

ανακλαστική $U \geq U \Rightarrow U \subseteq U$

μεταβατική

U, V περιοχές, $U, V \in \mathcal{U}_x$
$U \cap V \in \mathcal{U}_x$
$U\cap V \subseteq U \Leftrightarrow U \cap V \geq V$ $\quad U \cap V \subseteq V \Leftrightarrow U\cap V \geq U$

Άρα ένα σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ είναι κατευθυνόμενο.

* Μπορούσαμε να πάρουμε και τα υπερσύνολα και θα παίρναμε την ένωσή τους, καθώς αυτά τα συνδέει όλα.

Ορισμός

Αν A ένα κατευθυνόμενο σύνολο (directed) και $E \neq \emptyset$ μια συνάρτηση
$x: A \to E$
$a \to x(a) = x_a$. λέγεται δίκτυο (net) στο E.

Ορισμός

Ένα δίκτυο $(x_a)_{a \in A}$ συγκλίνει προς το $l \in E$ και $x_a \to l$ αν
$(\forall U \in \mathcal{N}_x)(\exists a_0 \in A)$ για οποιοδήποτε $a \geq a_0 \Rightarrow x_a \in U$.